Examen de Análisis de Variable Compleja
Cuarto curso de Matemáticas (Fundamental)
15 de febrero de 2000

1. Para todo $z \in \mathbb{C}$, $z \neq -i$, definamos $f(z) = \log(i+z)$ (logaritmo principal).
a) Justifíquese que f es discontinua en los puntos de la forma $\rho - i$, con $\rho < 0$, y holomorfa en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{\rho - i : \rho \leqslant 0\}$
b) Obténgase la serie de Taylor de f centrada en $z_0 = -1+i$. Sea φ la función suma de dicha serie definida, naturalmente, en su disco de convergencia. Indíquese para qué valores de $z \in \Omega$ se verifica que $f(z) = \varphi(z)$.
Solución. a) Sea $\rho < 0$, y $z_n = \rho - i(1+1/n)$. Entonces $\{z_n\} \to \rho - i$, y

$$f(z_n) = \log|i+z_n| + i\arg(\rho - i/n) = \log|i+z_n| - i\pi + i\operatorname{arc\,tg}\frac{-1}{n\rho} \to \log|\rho| - i\pi$$

mientras que $f(\rho - i) = \log(\rho) = \log|\rho| + i\pi$.
Puesto que el logaritmo principal es holomorfo en el abierto $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_o^+$, y la función $z \mapsto i+z$ es holomorfa y aplica Ω en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_o^+$, se sigue, en virtud de la regla de la cadena, que la función $z \mapsto \log(i+z) = f(z)$ es holomorfa en Ω y además $f'(z) = \dfrac{1}{i+z}$ para todo $z \in \Omega$.
b) Dado $z_o \in \Omega$, y supuesto que $|z - z_o| < |i + z_o|$, tenemos que:

$$\frac{1}{i+z} = \frac{1}{i+z_o+(z-z_o)} = \frac{1}{(i+z_o)\left(1+\dfrac{z-z_o}{i+z_o}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-z_o)^n}{(i+z_o)^{n+1}}$$

Deducimos que $f(z_o) + \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{(z-z_o)^n}{(i+z_o)^n}$ es la serie de Taylor de f centrada en z_o, y converge en el disco $D(z_o, |i+z_o|)$. Sea $z_o = -1+i$, entonces $|i+z_o| = |-1+2i| = \sqrt{5}$, por lo que para todo $z \in D(-1+i, \sqrt{5})$ es

$$\varphi(z) = f(-1+i) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{(z-z_o)^n}{(i+z_o)^n}$$

Puesto que para todo $z \in \mathcal{W} = \Omega \cap D(-1+i, \sqrt{5})$ se tiene $f'(z) = \varphi(z)$ y la componente conexa de $\mathcal{W}$ que contiene a $-1+i$ es $\Omega_1 = \mathcal{W} \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > -1\}$, deducimos que $f(z) = \varphi(z)$ para todo $z \in \Omega_1$ (porque la función $z \mapsto f(z) - \varphi(z)$ es derivable con derivada nula en el dominio Ω_1 y se anula en el punto $-1+i \in \Omega_1$).

2. Construir un isomorfismo conforme del dominio

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1,\ \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) > 1\}$$

sobre el dominio $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Im}(z) > 0\}$. Notemos $\mathcal{R}$ la recta que pasa por los puntos 1 e i ($\infty \in \mathcal{R}$). La transformación de Möbius dada para $z \in \overline{\mathbb{C}}$ por $\varphi(z) = -\dfrac{z-i}{z-1}$ es tal que $\varphi(\infty) = -1$, $\varphi(0) = -i$. Como los puntos 0 e ∞ son simétricos respecto de la circunferencia $C^*(0,1)$, deducimos que dicha circunferencia se transforma por φ en la recta mediatriz del segmento de extremos -1, $-i$, es decir, en la bisectriz del primer cuadrante. Además, como $\varphi(0) = -i$, deducimos que $\varphi(D(0,1)) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > \operatorname{Im}(z)\}$. La recta $\mathcal{R}$ se transforma por φ en una recta que pasa por $\varphi(i) = 0$ y por $\varphi(\infty) = -1$, es decir, en la recta $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Como $\varphi(0) = -i$, el semiplano $\mathcal{W} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) > 1\}$ se transforma en el semiplano superior $\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$. Deducimos que:

$$\varphi(\Omega) = \varphi(D(0,1) \cap \mathcal{W}) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > \operatorname{Im}(z)\} \cap \mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C}^* : 0 < \arg(z) < \pi/4\}$$

La aplicación $z \mapsto z^2$ es una biyección holomorfa de la región angular $\varphi(\Omega)$ sobre el cuadrante $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C}^* : 0 < \arg(z) < \pi/2\}$. Finalmente, la aplicación dada por $\psi(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$ es una transformación de Möbius que lleva el semiplano de la derecha al disco unidad y deja invariante el semiplano superior, luego transforma $\mathcal{H}$ en el dominio $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Im}(z) > 0\}$. Concluimos que la aplicación

$$z \mapsto \psi\big((\varphi(z))^2\big) = \frac{(z-i)^2 - (z-1)^2}{(z-i)^2 + (z-1)^2}$$

verifica las condiciones deseadas.

3. Dado $a \in \mathbb{C}$, $|a| \neq 1$, calcúlese la integral

$$\int_{C(0,1)} \frac{\cos z}{(a^2+1)z - a(z^2+1)}\, dz$$

Solución. Las raíces de la ecuación $(a^2+1)z - a(z^2+1) = 0$ son a y (supuesto $a \neq 0$) $1/a$. Deducimos que

$$(a^2+1)z - a(z^2+1) = -a(z-a)(z-1/a)$$

Descomponiendo en fracciones simples obtenemos:

$$\frac{1}{(a^2+1)z - a(z^2+1)} = \frac{1}{1-a^2}\frac{1}{z-a} - \frac{1}{1-a^2}\frac{1}{z-1/a}$$

Así

$$\int_{C(0,1)} \frac{\cos z}{(a^2+1)z-a(z^2+1)}\,dz = \frac{1}{1-a^2}\int_{C(0,1)} \frac{\cos z}{z-a}\,dz - \frac{1}{1-a^2}\int_{C(0,1)} \frac{\cos z}{z-1/a}\,dz$$

Si $|a|<1$, entonces la fórmula de Cauchy para una circunferencia nos da

$$\int_{C(0,1)} \frac{\cos z}{z-a}\,dz = 2\pi i\cos(a)$$

y, por otro lado,

$$\int_{C(0,1)} \frac{\cos z}{z-1/a}\,dz = 0$$

pues, si $1<\rho<1/|a|$, la función $z\mapsto \dfrac{\cos z}{z-1/a}$ es holomorfa en el disco $D(0,\rho)$ y puede aplicarse el teorema de Cauchy para dominios convexos. Por tanto, si $|a|<1$, tenemos que

$$\int_{C(0,1)} \frac{\cos z}{(a^2+1)z-a(z^2+1)}\,dz = 2\pi i\frac{\cos(a)}{1-a^2}$$

Razonando de forma análoga si $|a|>1$, obtenemos que en este caso

$$\int_{C(0,1)} \frac{\cos z}{(a^2+1)z-a(z^2+1)}\,dz = -2\pi i\frac{\cos(1/a)}{1-a^2}$$

4. Sea f una función entera no constante y supongamos que hay un número complejo $\alpha\neq 1$ tal que $f(z)=f(\alpha z)$ para todo $z\in\mathbb{C}$.
a) Pruébese que, $f(z)=f(\alpha^n z)$ para todo $n\in\mathbb{Z}$ y todo $z\in\mathbb{C}$, y dedúzcase que, necesariamente, $|\alpha|=1$.
b) Justifíquese que el conjunto $\{\alpha^n : n\in\mathbb{Z}\}$ es finito y, por tanto, existe $m\in\mathbb{N}$ tal que $\alpha^m=1$.
c) Sea m el menor número natural tal que $\alpha^m=1$. Justifíquese que hay una función entera g tal que $f(z)=g(z^m)$ para todo $z\in\mathbb{C}$.
Solución. a)Necesariamente $\alpha\neq 0$ (f no es constante) y la hipótesis implica que $f(z/\alpha)=f(z)$. Es inmediato que $f(z)=f(\alpha^n z)$ para todo $n\in\mathbb{N}$ (la inducción es casi trivial), lo que junto con que $f(z/\alpha)=f(z)$, permite concluir que dicha igualdad es cierta para todo $n\in\mathbb{Z}$. Si $|\alpha|<1$ la sucesión $\{\alpha^n z\}$ converge a 0 cualquiera sea $z\in\mathbb{C}$, por lo que $f(z)=f(\alpha^n z)\to f(0)$, es decir, $f(z)=f(0)$, y f sería constante en contra de la hipótesis. El mismo razonamiento aplicado a $1/\alpha$ implica que tampoco puede ser $|\alpha|>1$. Concluimos que $|\alpha|=1$.
b) La función $g(z)=f(z)-f(\alpha)$ es entera, no constante, y se anula en todos los puntos del conjunto $\{\alpha^n : n\in\mathbb{Z}\}$. Deducimos que dicho conjunto no tiene puntos de acumulación, y como, en virtud del apartado anterior, sabemos que está acotado, concluimos

(por el teorema de Bolzano-Weierstrass) que es finito. Luego tiene que haber, números enteros $p \neq q$ tales que $\alpha^p = \alpha^q$. Si $m = |p-q|$ entonces $m \in \mathbb{N}$ y $\alpha^m = 1$.
c) La existencia del *mínimo* número $m \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha^m = 1$ es consecuencia directa del apartado anterior. Se deduce fácilmente que $\alpha^n = 1$ si, y sólo si, n es múltiplo de m. Puesto que $f^{(n}(z) = \alpha^n f^{(n}(\alpha z)$, haciendo $z = 0$ se tiene que $f^{(n}(0) = \alpha^n f^{(n}(0)$ lo que implica que $f^{(n}(0) = 0$ si $\alpha^n \neq 1$, es decir si n no es múltiplo de m. Finalmente, en virtud del teorema de Taylor, sabemos que para todo $z \in \mathbb{C}$ es:

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n}(0)}{n!} z^n = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(km}(0)}{km!} z^{km} = g(z^m)$$

donde

$$g(z) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(km}(0)}{km!} z^k \quad (z \in \mathbb{C})$$

5.Sea f una función entera no constante. Dado un número $\rho > 0$, definamos:

$$E_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |f(z)| < \rho\}, \quad F_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leqslant \rho\}$$

a) Pruébese que la adherencia de E_ρ es igual a F_ρ.
b) Justifíquese que en cada componente conexa acotada de E_ρ hay por lo menos un cero de f.
Solución. a) Evidentemente, $E_\rho \subseteqq F_\rho$. La continuidad de f implica que F_ρ es cerrado, por lo que $\overline{E_\rho} \subseteqq F_\rho$. Para probar la inclusión contraria, bastará probar que si $|f(z)| = \rho$ entonces $z \in \overline{E_\rho}$. Ahora bien, si $|f(z)| = \rho > 0$, se sigue de las hipótesis hechas y por el principio del módulo mínimo, que el módulo de f no puede tener un mínimo relativo en z, es decir, cualquiera sea el disco $D(z, \varepsilon)$ tiene que haber puntos $w \in D(z, \varepsilon)$ tales que $|f(w)| < \rho$, esto es, $D(z, \varepsilon) \cap E_\rho \neq \emptyset$, lo que prueba que $z \in \overline{E_\rho}$.
b) Sea Ω una componente conexa acotada de E_ρ. Es claro que para todo $z \in Fr(\Omega)$ se tiene que $|f(z)| = \rho$. Por el principio del módulo máximo

$$\text{máx}\{|f(z)| : z \in \overline{\Omega}\} = \text{máx}\{|f(z)| : z \in Fr(\Omega)\} = \rho$$

La función $z \mapsto |f(z)|$ tiene que alcanzar un mínimo absoluto en $\overline{\Omega}$, y dicho mínimo no puede alcanzarse en la frontera pues en tal caso se tendría que $\text{mín}\{|f(z)| : z \in \overline{\Omega}\} = \rho$ y la función $z \mapsto |f(z)|$ sería constante en Ω lo que implicaría que f es constante en Ω y, por el principio de identidad, sería constante en $\mathbb{C}$, contra la hipótesis hecha. Concluimos que dicho mínimo se alcanza en un punto $z_o \in \Omega$ y, por el principio del módulo mínimo, concluimos que $f(z_o) = 0$.